

Correction Bac S – Amérique du Nord – 4 juin 2009

Exercice 1 (Commun à tous les candidats) (5 points) :

Partie A : Étude de la progression de l'épidémie pendant 30 jours.

1. On considère la fonction z définie sur l'intervalle $[0 ; 30]$ par $z = \frac{1}{y}$.

$$y' = 0,05y(10 - y) \Leftrightarrow -\frac{z'}{z^2} = 0,05 \times \frac{1}{z} \left(10 - \frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow -z' = 0,05(10z - 1) = 0,5z - 0,05.$$
$$\Leftrightarrow z' = -0,5z + 0,05.$$

$$\text{Et, } y(0) = 0,01 \Leftrightarrow z(0) = \frac{1}{y(0)} = \frac{1}{0,01} = 100.$$

$$\text{Donc, } \begin{cases} y(0) = 0,01 \\ y' = 0,05y(10 - y) \end{cases} \text{ si et seulement si } \begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0,5z + 0,05 \end{cases}$$

2. a) L'équation différentielle $z' = -0,5z + 0,05$ a pour solution $z(x) = k e^{-0,5x} - \frac{0,05}{-0,5}$

Soit, $z(x) = k e^{-0,5x} + 0,1$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Or, $z(0) = 100$ donc, $k + 0,1 = 100$ soit $k = 99,9$.

$$\text{Donc, } z(x) = 99,9e^{-0,5x} + 0,1 \quad \text{et} \quad y(x) = \frac{1}{99,9e^{-0,5x} + 0,1}.$$

b) $y(30) = 10$ à l'unité près.

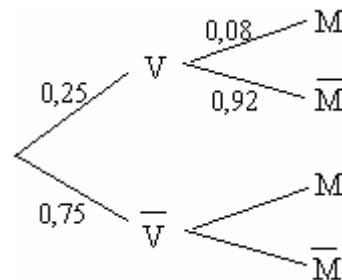
Donc, après 30 jours, 10 % de la population sera infectée.

Partie B : Étude sur l'efficacité d'un vaccin.

On notant V l'événement « l'individu est vacciné »

et M l'événement « l'individu est malade »,

on peut traduire la situation décrite par l'arbre de probabilités ci-contre :



On sait aussi que $p(M) = 0,1$.

1. On cherche $p(\bar{V} \cap M)$.

Or, comme V et \bar{V} forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, $p(M) = p(V \cap M) + p(\bar{V} \cap M)$.

$$\text{D'où, } p(\bar{V} \cap M) = p(M) - p(V \cap M) = 0,1 - 0,25 \times 0,08 = 0,1 - 0,02 = 0,08.$$

2. On cherche $p_{\bar{V}}(M)$. Or, $p_{\bar{V}}(M) = \frac{p(\bar{V} \cap M)}{p(\bar{V})} = \frac{0,08}{0,75} = 0,11$ à 10^{-2} près.

Donc, 11 % des individus non vaccinés tombent malades.

Exercice 2 (Commun à tous les candidats) (5 points) :

Partie A : Restitution organisée de connaissances

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \text{ de } [a ; b], \quad f(x) \leq g(x) &\Leftrightarrow g(x) - f(x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0 \quad (\text{prérequis 1}) \\ &\Leftrightarrow \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (\text{prérequis 2}) \\ &\Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = e^{-x^2}$ et on définit la suite (u_n)

$$\text{par : } \begin{cases} u_0 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx \\ \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 x^n f(x) dx = \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx \end{cases}$$

1. a. $x \in [0 ; 1] \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$
 $\Leftrightarrow -1 \leq -x^2 \leq 0$
 $\Leftrightarrow e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq e^0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .
 $\Leftrightarrow \frac{1}{e} \leq f(x) \leq 1.$

b. De la question précédente, d'après l'inégalité de la moyenne, on en déduit que :

$$\frac{1}{e}(1 - 0) \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 1(1 - 0).$$

D'où, $\frac{1}{e} \leq u_0 \leq 1.$

2. $u_1 = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right]_0^1$ donc, $u_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}.$

3. a. Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $x^n \geq 0$ et $e^{-x^2} > 0$.

Donc, par produit, pour tout $x \in [0 ; 1]$, $x^n e^{-x^2} \geq 0$.

Par positivité de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens), $\int_0^1 x^n e^{-x^2} dx \geq 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.

b. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x^2} dx - \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx = \int_0^1 x^n (x - 1) e^{-x^2} dx$.

Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $x^n e^{-x^2} \geq 0$ et $x - 1 \leq 0$, donc, par produit, $x^n (x - 1) e^{-x^2} \leq 0$.

Ainsi, par passage à l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens),

$$\int_0^1 x^n (x - 1) e^{-x^2} dx \leq 0$$

Donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.

c. On vient de voir que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.

Donc, la suite (u_n) est convergente.

4. a. Dans la question 1a, on a vu que, pour tout $x \in [0 ; 1]$, $f(x) \leq 1$.

Donc, en multipliant par x^n (nombre positif sur $[0 ; 1]$), on a : $x^n f(x) \leq x^n$.

D'où, par passage à l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens), on obtient :

$$\int_0^1 x^n f(x) dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

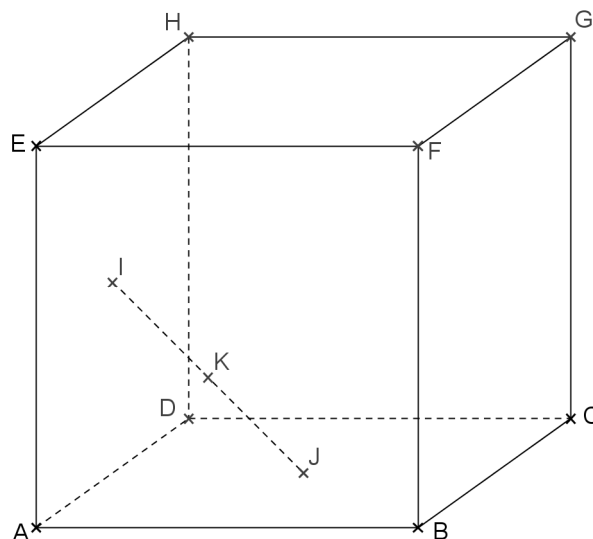
$$\text{Comme } \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$\text{On a bien : } u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

b. Pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 3 (Commun à tous les candidats) (5 points) :



On note I le centre de la face ADHE, J celui de la face ABCD et K le milieu du segment [IJ].
L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

1. Comme $\vec{AI} = \frac{1}{2} \vec{AD} + \frac{1}{2} \vec{AE}$, on a : $I \left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right)$.

Comme $\vec{AJ} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AD}$, on a : $J \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 0 \right)$.

Comme K est le milieu de [IJ], on a : $K \left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{4} \right)$.

2. $\overrightarrow{AK} \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4} \right)$ et $\overrightarrow{AG} (1; 1; 1)$. Les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires.
Ainsi, **les points A, K et G ne sont pas alignés.**

3. a) On a : $\overrightarrow{IJ} \left(\frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2} \right)$.

☞ $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{4} = 0$ donc, les vecteurs \overrightarrow{IJ} et \overrightarrow{AK} sont orthogonaux.

☞ $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2} \times 1 + 0 \times 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 = 0$ donc, les vecteurs \overrightarrow{IJ} et \overrightarrow{AG} sont orthogonaux.

Ainsi, le vecteur \overrightarrow{IJ} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (AKG).

Donc, le vecteur \overrightarrow{IJ} est normal au plan (AKG).

De plus, le plan (AKG) passe par le point K milieu de [IJ].

Donc, **le plan (AKG) est bien le plan médiateur de [IJ].**

Remarque : on aurait pu démontrer que les points A, K et G sont équidistants des points I et J.

b) Comme $\overrightarrow{IJ} \left(\frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2} \right)$ est normal au plan (AKG), une équation de (AKG) est de la forme $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z + d = 0$.

Or, A (0 ; 0 ; 0) appartient à ce plan et donc, $d = 0$.

Finalement, une équation de (AKG) est $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z = 0$ ou encore, $x - z = 0$.

c) On a : D (0 ; 1 ; 0) et $x_D - z_D = 0$ donc, **D ∈ (AKG).**

4. a) A (0 ; 0 ; 0) et L $\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2} \right)$ car $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AE}$.

Le milieu de [AL] a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4} \right)$.

Donc, **le point K est le milieu du segment [AL].**

b) Comme K est le milieu de [AL], on a : K barycentre de $\{(A,2) (L,2)\}$.

Comme L est le milieu de [DG], on a : L barycentre de $\{(D,1) (G,1)\}$.

Ainsi, par associativité du barycentre, **K barycentre de $\{(A,2) (D,1) (G,1)\}$.**

Exercice 4 (Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité) (5 points) :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A le point d'affixe $a = 1 + i\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $b = 1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$.

Partie A Étude d'un cas particulier

1. a.
$$\frac{-a}{b-a} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} + i} = \frac{i(-\sqrt{3} + i)}{-\sqrt{3} + i} = i.$$

b. On a :
$$\left| \frac{-a}{b-a} \right| = \frac{AO}{AB} = 1 \text{ donc, } OA = AB.$$

Et,
$$\arg\left(\frac{-a}{b-a}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}.$$

Donc, **OAB est un triangle rectangle isocèle en A.**

2. C est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ donc, $c = e^{i\frac{2\pi}{3}} a$.

D'où,
$$c = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i\sqrt{3}) = \dots = -2.$$

On admet que $d = -2 - 2i$.

3. a. On a : A $(1; \sqrt{3})$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}(x_A + 2) = \sqrt{3} = y_A$

Et, C $(-2; 0)$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}(x_C + 2) = 0 = y_C$.

Ainsi, les coordonnées des points A et C sont solutions de l'équation $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 2)$.

Donc, **la droite (AC) a bien pour équation $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 2)$.**

b. Le milieu de [BD] a pour affixe :
$$z = \frac{b+d}{2} = \frac{-1 - \sqrt{3} + (-1 + \sqrt{3})i}{2}.$$

On a :
$$\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2} + 2\right) = \frac{-\sqrt{3} - 3 + 6}{6} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$$

Donc, **le milieu du segment [BD] appartient à la droite (AC).**

Partie B Étude du cas général

L'objectif est de démontrer que la droite (AA') coupe le segment [BB'] en son milieu.

1. On a : **$a' = e^{i\theta} a$** et **$b' = e^{i\theta} b$** .

2. a. P est le milieu de [AA'] donc,
$$p = \frac{a + a'}{2} = \frac{a}{2}(1 + e^{i\theta}).$$

Q est le milieu de [BB'] donc,
$$q = \frac{b + b'}{2} = \frac{b}{2}(1 + e^{i\theta}).$$

$$b. \frac{-p}{q-p} = \frac{-\frac{a}{2}(1+e^{i\theta})}{\frac{b}{2}(1+e^{i\theta}) - \frac{a}{2}(1+e^{i\theta})} = \frac{-a}{b-a}.$$

$$c. \text{ On a : } (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PO}) = \arg\left(\frac{-p}{q-p}\right) = \arg\left(\frac{-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Donc, la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (PQ).

- d. Le triangle OAA' est isocèle en O et P est le milieu de [AA'],
donc (OP) est une hauteur et ainsi, (OP) est perpendiculaire à (AA').
Comme (OP) est perpendiculaire à (PQ), on en déduit que (PQ) est parallèle à (AA').
Or ces deux droites passent par P. Elles sont donc confondues.
Par conséquent, le point Q appartient à la droite (AA').

Ainsi, le milieu de [BB'] est sur la droite (AA').