

# Correction Bac S – France - Métropole – 19 juin 2008

## EXERCICE 1 (5 points) Barème : 1a) 1 , 1b) 1,25 , 1c) 0,25 , 1d) 1 , 2) 1,5

Les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = \ln x$  et  $g(x) = (\ln x)^2$ .

1) On note  $I = \int_1^e \ln x \, dx$  et  $J = \int_1^e (\ln x)^2 \, dx$ .

a) La fonction  $F$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$  et on a :  $F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$ .

Donc, la fonction  $F$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $F(x) = x \ln x - x$  est une primitive de la fonction logarithme népérien.

D'où,  $I = F(e) - F(1)$  avec  $F(e) = e - e = 0$  et  $F(1) = 0 - 1 = -1$ . Donc,  $I = 1$ .

b) On a :  $J = \int_1^e (\ln x)^2 \, dx$ .

Soient  $u$  et  $v$  les fonctions définies par :  $u(x) = (\ln x)^2$  et  $v'(x) = 1$ .

Alors,  $u'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$  et  $v(x) = x$ .

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables et les fonction  $u'$  et  $v'$  sont continues.

Donc, d'après la formule d'intégration par parties,

$$J = \left[ x (\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e 2 \ln x \, dx = e - 2 \int_1^e \ln x \, dx \text{ et donc, } J = e - 2I.$$

c) On a :  $J = e - 2I$  et  $I = 1$  donc,  $J = e - 2$ .

d)  $A = \int_1^e (f(x) - g(x)) \, dx$  car sur  $[1 ; e]$ ,  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de  $\mathcal{C}_g$ .

D'où,  $A = \int_1^e f(x) \, dx - \int_1^e g(x) \, dx = I - J$ .

Ainsi,  $A = 1 - (e - 2)$  soit,  $A = 3 - e$ .

2) Pour  $x \in [1 ; e]$ , on a :  $M(x ; f(x))$  et  $N(x ; g(x))$ .

Ainsi,  $MN = f(x) - g(x)$  car sur  $[1 ; e]$ ,  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de  $\mathcal{C}_g$ .

Donc,  $MN = \ln x - (\ln x)^2$ .

Soit  $h$  la fonction définie sur  $[1 ; e]$  par  $h(x) = \ln x - (\ln x)^2$ .

La fonction  $h$  est dérivable sur  $[1 ; e]$  et  $h'(x) = \frac{1}{x} - 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{1}{x}(1 - 2 \ln x)$ .

Comme  $x \in [1 ; e]$ ,  $h'(x)$  a le même signe que  $1 - 2 \ln x$ .

Or,  $1 - 2 \ln x \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq e^{\frac{1}{2}}$ .

D'où le tableau de variation suivant :

$x$	1	$e^{\frac{1}{2}}$	e
signe de $h'(x)$	+	0	-
$h$	0	1/4	0

Donc, la distance  $MN$  est maximale pour  $x = e^{\frac{1}{2}}$  et la valeur maximale de  $MN$  est  $\frac{1}{4}$ .

**EXERCICE 2 (5 points)** Barème : 1a) 0,5 , 1b) 1 , 2) 1 , 3) 1 , 4) 1,5

1) a) On a :  $\vec{AB}$  (0 ; 1 ; 1) et  $\vec{AC}$  (2 ; -2 ; 2).

Les coordonnées des vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  ne sont pas colinéaires.

Ainsi, les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

b) Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  n'étant pas alignés, ils définissent bien un plan.

Soit  $(T)$  le plan d'équation  $2x + y - z - 3 = 0$ .

On a :  $2x_A + y_A - z_A - 3 = 2 \times 1 + 1 - 0 - 3 = 0$ . Donc,  $A \in (T)$ .

$2x_B + y_B - z_B - 3 = 2 \times 1 + 2 - 1 - 3 = 0$ . Donc,  $B \in (T)$ .

$2x_C + y_C - z_C - 3 = 2 \times 3 - 1 - 2 - 3 = 0$ . Donc,  $C \in (T)$ .

Donc,  $(T) = (ABC)$  et le plan  $(ABC)$  a bien pour équation :  $2x + y - z - 3 = 0$ .

2) Soient  $(P)$  et  $(Q)$  d'équations respectives  $x + 2y - z - 4 = 0$  et  $2x + 3y - 2z - 5 = 0$ .

Le plan  $(P)$  a pour vecteur normal :  $\vec{n}_P$  (1 ; 2 ; -1).

Le plan  $(Q)$  a pour vecteur normal :  $\vec{n}_Q$  (2 ; 3 ; -2).

Les vecteurs  $\vec{n}_P$  et  $\vec{n}_Q$  n'étant pas colinéaires, les plans  $(P)$  et  $(Q)$  sont sécants suivant une droite  $(\mathcal{D})$ .

Cette droite  $(\mathcal{D})$  est caractérisée par le système : 
$$\begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

Or, 
$$\begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - 2z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + z + 4 \\ 2(-2y + z + 4) + 3y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + z + 4 \\ -y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z - 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

3) Les deux plans  $(P)$  et  $(Q)$  se coupent suivant la droite  $(\mathcal{D})$ .

Un vecteur directeur de  $(\mathcal{D})$  est  $\vec{u}$  (1 ; 0 ; 1). Un vecteur normal à  $(ABC)$  est  $\vec{n}$  (2 ; 1 ; -1).

On a :  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \times 2 + 0 \times 1 + 1 \times (-1) \neq 0$ .

Donc, la droite  $(\mathcal{D})$  n'est pas parallèle au plan  $(ABC)$ .

D'où, l'intersection des trois plans  $(ABC)$ ,  $(P)$  et  $(Q)$  est le point d'intersection de  $(\mathcal{D})$  avec  $(ABC)$ .

Les coordonnées de ce point sont solutions du système : 
$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \\ 2x + y - z - 3 = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, on doit avoir :  $2(-2 + t) + 3 - t - 3 = 0$  soit  $t = 4$ .

D'où,  $x = 2$  ;  $y = 3$  et  $z = 4$ .

Finalement,  $(ABC) \cap (P) \cap (Q) = (2 ; 3 ; 4)$ .

4) Soit  $M(x ; y ; z)$  un point de  $(\mathcal{D})$ .

La distance du point  $A$  à la droite  $(\mathcal{D})$  est la plus petite distance  $AM$ .

Or, comme  $AM$  est positive,  $AM$  minimale équivaut à  $AM^2$  minimale.

Or,  $M(-2 + t ; 3 ; t)$ .

Donc,  $AM^2 = (-2 + t - 1)^2 + (3 - 1)^2 + (t - 0)^2$

Soit,  $AM^2 = 2t^2 - 6t + 13$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = 2t^2 - 6t + 13$ .

Cette fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (fonction polynôme) et  $f'(t) = 4t - 6$ .

On a donc le tableau de variation suivant :

$t$	$-\infty$	$3/2$	$+\infty$
signe de $f'(t)$	-	0	+
$f$			

Le minimum de  $f$  est atteint pour  $t = \frac{3}{2}$  et ce minimum vaut :

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \times \frac{9}{4} - 6 \times \frac{3}{2} + 13 = \frac{17}{2}.$$

Donc,  $d(A, (\mathcal{D})) = \sqrt{\frac{17}{2}} = \frac{\sqrt{34}}{2}$ .

### **EXERCICE 3 (5 points)** Barème : 1a) 1 , 1b) 1 , 2a) 1 , 2b) 1 , 2c) 1

La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  où  $\lambda$  est un réel strictement positif.

On rappelle que pour tout  $t \geq 0$ ,  $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ .

La fonction  $R$  définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par  $R(t) = P(X > t)$  est appelée fonction de fiabilité.

#### 1) *Restitution organisée de connaissances*

a) Pour tout  $t \geq 0$  on a :  $R(t) = P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ .

Or,  $\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = -e^{-\lambda t} + 1$ .

Par suite,  $R(t) = e^{-\lambda t}$ .

b) On a :  $P_{X>t}(X > t + s) = \frac{P((X > t) \cap (X > t + s))}{P(X > t)}$ .

Or,  $(X > t + s) \subset (X > t)$ . D'où,  $(X > t) \cap (X > t + s) = (X > t + s)$ .

Donc,  $P_{X>t}(X > t + s) = \frac{P(X > t + s)}{P(X > t)} = \frac{R(t + s)}{R(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$ .

Ainsi, la probabilité conditionnelle  $P_{X>t}(X > t + s)$  ne dépend pas du nombre  $t \geq 0$ .

Donc, **la variable  $X$  suit une loi de durée de vie sans vieillissement.**

2) Dans cette question, on prend  $\lambda = 0,00026$ .

a)  $P(X \leq 1\,000) = 1 - R(1\,000) = 1 - e^{-0,26}$   
et  $P(X > 1\,000) = R(1\,000) = e^{-0,26}$ .

b) On cherche à calculer  $P_{X > 1000}(X > 2\,000)$ .

$$\begin{aligned} \text{Or, } P_{X > 1000}(X > 2\,000) &= \frac{P((X > 1000) \cap (X > 2000))}{P(X > 1000)} = \frac{P(X > 2000)}{P(X > 1000)} \\ &= \frac{e^{-0,00026 \times 2000}}{e^{-0,00026 \times 1000}} = e^{-0,26}. \end{aligned}$$

Donc, sachant que l'événement  $(X > 1\,000)$  est réalisé, la probabilité de l'événement  $(X > 2\,000)$  est égale à  $e^{-0,26}$ .

c) On cherche à calculer :  $P_{X > 2000}(X \leq 3\,000)$ .

$$\begin{aligned} \text{Or, } P_{X > 2000}(X \leq 3\,000) &= \frac{P((X > 2000) \cap (X \leq 3000))}{P(X > 2000)} \\ &= \frac{1 - P(X \leq 2000) - P(X > 3000)}{P(X > 2000)}. \end{aligned}$$

On a :  $P(X \leq 2\,000) = 1 - R(2\,000) = 1 - e^{-0,52}$  ;  $P(X > 3\,000) = e^{-0,78}$   
Et,  $P(X > 2\,000) = e^{-0,52}$ .

$$\text{D'où, } P_{X > 2000}(X \leq 3\,000) = \frac{e^{-0,52} - e^{-0,78}}{e^{-0,52}} = 1 - e^{-0,26}.$$

Oui, on pouvait prédire ce résultat grâce à la propriété établie dans la question 1b, à savoir que  $X$  suit une loi de durée de vie sans vieillissement :

$$P_{X > 2000}(X \leq 3\,000) = 1 - P_{X > 2000}(X > 3\,000) = 1 - P(X > 1\,000) = 1 - e^{-0,26}.$$

**EXERCICE 4 (5 points)** Barème : 1) 0,5 , 2) 0,5 , 3) 0,5 , 4a) 0,25 , 4b) 0,75 , 4c) 0,75  
5a) 0,5 , 5b) 0,5 , 5c) 0,75

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique : 1 cm).

Soient  $A, B$  et  $I$  les points d'affixes respectives  $1 + i, 3 - i$  et  $2$ .

À tout point  $M$  d'affixe  $z$ , on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que  $z' = z^2 - 4z$ . Le point  $M'$  est appelé l'image de  $M$ .

1) Voir figure à la fin.

2) Le point  $A'$  a pour affixe :  $z_A'^2 - 4z_A' = (1 + i)^2 - 4(1 + i) = 1 + 2i - 1 - 4 - 4i$ .  
Soit,  $z_{A'} = -4 - 2i$ .

Le point  $B'$  a pour affixe :  $z_B'^2 - 4z_B' = (3 - i)^2 - 4(3 - i) = 9 - 6i - 1 + 12 + 4i$ .

D'où,  $z_{B'} = -4 - 2i$ .

On remarque que les points  $A'$  et  $B'$  sont confondus.

3) On cherche les points d'affixe  $z$  tels que :  $z' = -5$ .

Or,  $z' = -5 \Leftrightarrow z^2 - 4z + 5 = 0$ .

Cette équation du second degré a pour discriminant :  $\Delta = -4$ .

Elle a donc deux solutions complexes conjuguées :  $z_1 = \frac{4-2i}{2} = 2-i$  et  $z_2 = \overline{z_1} = 2+i$ .

Donc, les deux points d'affixes  $2-i$  et  $2+i$  ont pour image le point d'affixe  $-5$ .

4) a) Pour tout nombre complexe  $z$ , on a :  $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$ .

b) De la question précédente, on déduit que :  $|z' + 4| = |(z-2)^2|$  soit,  $|z' + 4| = |z-2|^2$ .  
Et, pour  $z \neq 2$ ,  $\arg(z' + 4) = \arg((z-2)^2)$  soit,  $\arg(z' + 4) = 2 \arg(z-2)$ .

c) Si  $M$  décrit le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $I$  et de rayon 2 alors,  $|z-2| = 2$ .

Ainsi,  $|z' + 4| = 2^2 = 4$ .

Donc,  $M'$  décrit le cercle de centre le point d'affixe  $-4$  (point  $J$  dans la suite) et de rayon 4.

5) Soient  $E$  le point d'affixe  $2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ,  $J$  le point d'affixe  $-4$  et  $E'$  l'image de  $E$ .

a)  $IE = |z_E - z_I| = |2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}} - 2| = |2e^{i\frac{\pi}{3}}| = 2 \times |e^{i\frac{\pi}{3}}| = 2$ .

$(\vec{u} ; \overrightarrow{IE}) = \arg(z_E - z_I) = \arg(2e^{i\frac{\pi}{3}}) = \frac{\pi}{3}$ .

b)  $JE' = |z_{E'} - z_J| = |z_{E'} + 4| = |z_E - 2|^2 = |z_E - z_I|^2 = 4$

Et,  $(\vec{u} ; \overrightarrow{JE'}) = \arg(z_{E'} - z_J) = 2\arg(z_E - z_I) = \frac{2\pi}{3}$ .

c) Voir ci-dessous.

