Bac S – Asie – juin 2008 – 5 points

Soit a et b deux entiers naturels non nuls ; on appelle « réseau » associé aux entiers a et b l'ensemble des points du plan, muni d'un repère orthononnal, dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ sont des entiers vérifiant les conditions :

$$0 \leqslant x \leqslant a \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant b.$$

On note $R_{a,b}$ ce réseau.
Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers x et y à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.

A – Représentation graphique de quelques ensembles

Dans cette question, les réponses sont attendues sans explication, sous la forme d'un graphique qui sera dûment complété sur la feuille annexe à rendre avec la copie.

Représenter graphiquement les points $M(x\ ;\ y)$ du réseau $R_{8,8}$ vérifiant :

a) $x \equiv 2$ (modulo 3) et $y \equiv 1$ (modulo 3), sur le graphique 1 de la feuille annexe ;

b) $x + y \equiv 1$ (modulo 3) sur le graphique 2 de la feuille annexe ;

c) $x \equiv y$ (modulo 3) sur le graphique 3 de la feuille annexe.

B – Résolution d'une équation

On considère l'équation (E) : $7x - 4y = 1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1) Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0\ ;\ y_0)$ solution de l'équation (E).

2) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

3) Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution $(x\ ;\ y)$ pour laquelle le point $M(x\ ;\ y)$ correspondant appartient au réseau $R_{4,7}$.

C – Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau.

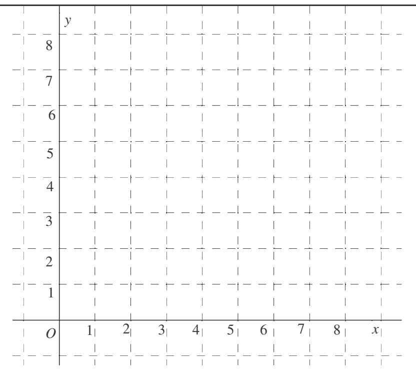
Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale $[OA]$ du réseau $R_{a,b}$, avec $O(0\ ;\ 0)$ et $A(a\ ;\ b)$.

1) Démontrer que les points du segment $[OA]$ sont caractérisés par les conditions :

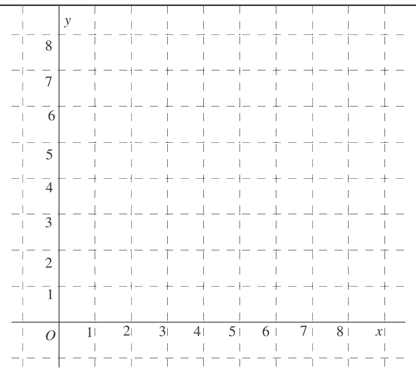
$$0 \leqslant x \leqslant a \quad ; \quad 0 \leqslant y \leqslant b \quad ; \quad ay = bx.$$

2) Démonter que si a et b sont premiers entre eux, alors les points O et A sont les seuls points du segment $[OA]$ appartenant au réseau $R_{a,b}$.

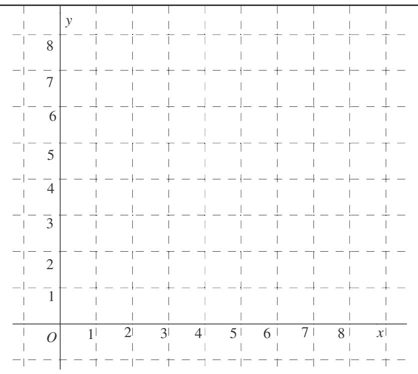
3) Démontrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le segment $[OA]$ contient au moins un autre point du réseau. (On pourra considérer le pgcd d des nombres a et b et poser $a = da'$ et $b = db'$.)



Graphique n°1



Graphique n°2



Graphique n°3