

Bac S – Antilles Guyane – septembre 2008 – 5 points
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A

On considère le système de congruences :

$$(S) \begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}, \text{ où } n \text{ désigne un entier relatif.}$$

- 1) Montrer que 11 est solution de (S).
- 2) Montrer que si n est solution de (S) alors $n - 11$ est divisible par 3.
- 3) Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11 + 15k$, où k désigne un entier relatif.

PARTIE B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z' et g celle qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z'' définies par : $\frac{1}{2}$

$$z' = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) z \text{ et } z'' = e^{i\frac{\pi}{5}} z.$$

- 1) Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g .
- 2) On considère les points A_0 et B_0 d'affixes respectives $a_0 = 2 e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $u_0 = 4 e^{-i\frac{\pi}{5}}$.
Soient (A_n) et (B_n) les suites de points définies par les relations de récurrences :
$$A_{n+1} = f(A_n) \text{ et } B_{n+1} = g(B_n).$$

On note a_n et b_n les affixes respectives de A_n et B_n .
 - a. Quelle est la nature de chacun des triangles OA_nA_{n+1} ?
 - b. En déduire la nature du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$.
- 3)
 - a. Montrer que les points B_n sont situés sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
 - b. Indiquer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+2}})$.
 - c. En déduire la nature du polygone $B_0B_2B_4B_6B_8$.
- 4)
 - a. Exprimer a_n et b_n en fonction de n .
 - b. Montrer que les entiers n pour lesquels les points A_n et B_n sont simultanément sur l'axe des réels sont les solutions du système (S) de la PARTIE A.