Bac S – Antilles Guyane – juin 2008

<u>Exercice 1 (commun à tous les candidats) (6 points)</u> :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$.

Partie A
Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3e^{-3x}$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.

2) En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{9}{2}e^{-2x}$ est solution de (E').

3) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de l'équation (E).

4) En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

Partie B
On nomme $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité 1 cm.

1) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f(x) = 3e^{-2x}\left(\dfrac{3}{2} - e^{-x}\right)$.

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.

3) Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.

4) Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec les axes du repère.

5) Calculer $f(1)$ et tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

6) Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. On exprimera cette aire en cm^2.

Exercice 2 (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité) (5 points) :

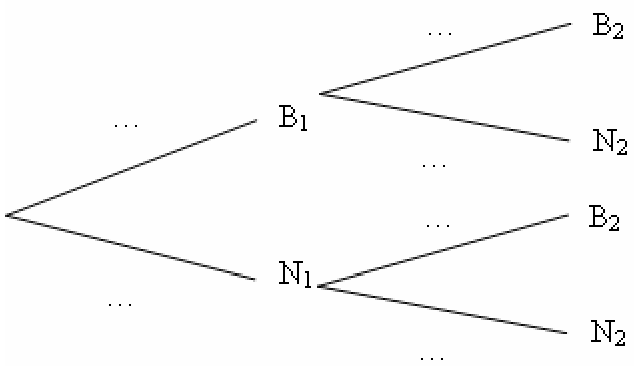
On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient k boule blanches (k entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.
U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire.

On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2. On tire ensuite, au hasard, une boule dans U_2. L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

On note B_1 (respectivement N_1) l'événement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_1 ».
On note B_2 (respectivement N_2) l'événement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_2 ».

1) a. Recopier et compléter par les probabilités manquantes l'arbre ci-dessous :



b. Montrer que la probabilité de l'événement B_2 est égale à $\dfrac{3k+6}{4k+12}$.

Dans la suite on considère que $k = 12$.
Les questions 2 et 3 sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

2) Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve.
Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit 12 euros. Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise.
Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.
   a. Montrer que les valeurs possibles de X sont 4 et -8.
   b. Déterminer la loi de probabilité de la variable X.
   c. Calculer l'espérance mathématique de X.
   d. Le jeu est-il favorable au joueur ?
3) Un joueur participe n fois de suite à ce jeu.
Au début de chaque épreuve, l'urne U_1 contient 12 boules blanches et 3 noires, et l'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 noire.
Ainsi, les épreuves successives sont indépendantes.
Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité de réaliser au moins une fois l'événement B_2 soit supérieure ou égale à 0,99

<u>Exercice 3 (commun à tous les candidats) (4 points)</u> :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1) L'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que : $\begin{cases} 2x-6y+2z-7=0 \\ -x+3y-z+5=0 \end{cases}$ est :

   Réponse A : l'ensemble vide
   Réponse B : une droite
   Réponse C : un plan
   Réponse D : réduit à un point.

2) Les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=-1+t \\ z=2-3t \end{cases} (t\in\mathbb{R}) \text{ et } \begin{cases} x=2+t \\ y=-2-t \\ z=4+2t \end{cases} (t\in\mathbb{R}), \text{ sont :}$$

   Réponse A : parallèles et distinctes
   Réponse B : confondues
   Réponse C : sécantes
   Réponse D : non coplanaires

3) La distance du point $A(1\ ;\ -2\ ;\ 1)$ au plan d'équation $-x+3y-z+5=0$ est égale à :

   Réponse A : $\dfrac{3}{11}$
   Réponse B : $\dfrac{3}{\sqrt{11}}$
   Réponse C : $\dfrac{1}{2}$
   Réponse D : $\dfrac{8}{\sqrt{11}}$

4) Le projeté orthogonal du point $B(1\ ;\ 6\ ;\ 0)$ sur le plan d'équation $-x+3y-z+5=0$ a pour coordonnées :

   Réponse A : $(3\ ;\ 1\ ;\ 5)$
   Réponse B : $(2\ ;\ 3\ ;\ 1)$
   Réponse C : $(3\ ;\ 0\ ;\ 2)$
   Réponse D : $(-2\ ;\ 3\ ;\ -6\ )$

Exercice 4 (commun à tous les candidats) (5 points) :

La feuille annexe donnée portera les constructions demandées au cours de l'exercice.
Cette feuille est à rendre avec la copie.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$, le point A a pour affixe i.
On nomme f l'application qui, à tout point M d'affixe z avec $z \neq \mathrm{i}$ associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{-z^2}{z - \mathrm{i}}$.
Le but de l'exercice est de construire géométriquement le point M' connaissant le point M.

1) **Un exemple.**
   On considère le point K d'affixe $1 + \mathrm{i}$.
   a. Placer le point K.
   b. Déterminer l'affixe du point K' image de K par f.
   c. Placer le point K'.

2) **Des points pour lesquels le problème ne se pose pas.**
   a. On considère le point L d'affixe $\dfrac{\mathrm{i}}{2}$. Déterminer son image L' par f. Que remarque-t-on ?
   b. Un point est dit invariant par f s'il est confondu avec son image.
   Démontrer qu'il existe deux points invariants par f dont on déterminera les affixes.

3) **Un procédé de construction.**
   On nomme G l'isobarycentre des points A, M et M', et g l'affixe de G.
   a. Vérifier l'égalité $g = \dfrac{1}{3(z - \mathrm{i})}$.
   b. En déduire que : si M est un point du cercle de centre A de rayon r, alors G est un point du cercle de centre O de rayon $\dfrac{1}{3r}$.
   c. Démontrer que $\arg g = -(\vec{u}\ ; \overrightarrow{\mathrm{AM}})$.
   d. Sur feuille annexe, on a marqué un point D sur le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{1}{2}$.
   On nomme D' l'image de D par f. Déduire des questions précédentes la construction du point D' et la réaliser sur **la figure annexe à rendre avec la copie**.

Annexe à rendre avec la copie

Sur la figure ci-dessous le segment [OI] tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OI}$ est partagé en six segments d'égale longueur.