

Baccalauréat S – Nouvelle-Calédonie – novembre 2007 – 5 points
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

- 1) (a) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.
- (b) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ? Justifier.
- (c) En déduire que $6^{40} \equiv 1 [11]$ et que $6^{40} \equiv 1 [5]$.
- (d) Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.
- 2) Dans cette question, x et y désignent des entiers relatifs.
- (a) Montrer que l'équation
- $$(E) \quad 65x - 40y = 1$$
- n'a pas de solution.
- (b) Montrer que l'équation
- $$(E') \quad 17x - 40y = 1$$
- admet au moins une solution.
- (c) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E') .
- (d) Résoudre l'équation (E') .
En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1 [40]$.
- 3) Pour tout entier naturel a , démontrer que si $a^{17} \equiv b [55]$ et si $a^{40} \equiv 1 [55]$, alors $b^{33} \equiv a [55]$.