

Bac S – Antilles Guyane – juin 2007

Exercice 1 (commun à tous les candidats) (6 points) :

Question de cours

Prérequis : positivité et linéarité de l'intégrale.

Soient a et b deux réels d'un intervalle I de \mathbb{R} tels que $a \leq b$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur I telles que pour tout réel x de l'intervalle I , $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

Partie A

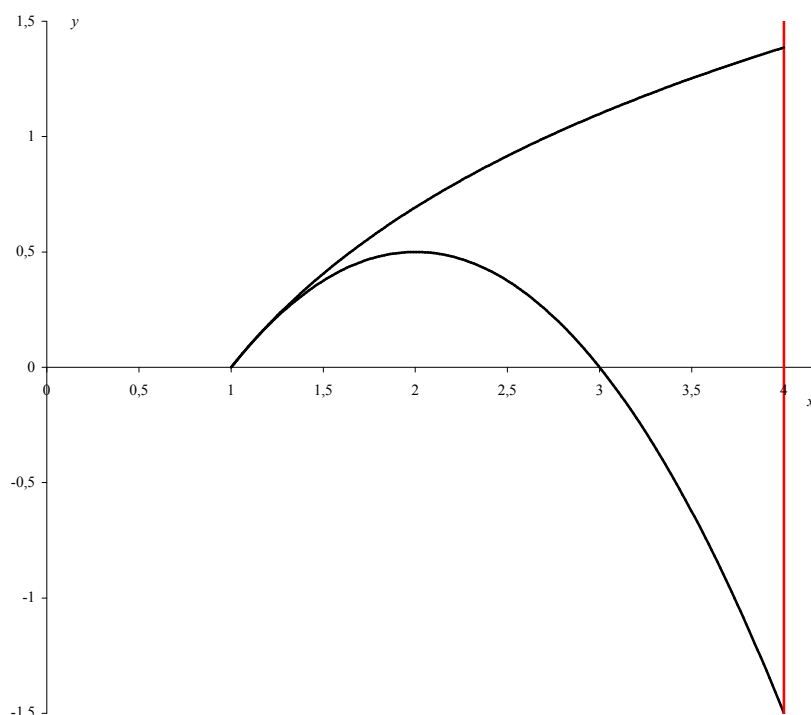
- 1) Soit x un réel supérieur ou égal à 1. Calculer en fonction de x l'intégrale $\int_1^x (2-t) dt$.
- 2) Démontrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[1 ; +\infty[$, on a : $2-t \leq \frac{1}{t}$.
- 3) Dédire de ce qui précède que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a : $-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \leq \ln(x)$.

Partie B

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$.

Sur le graphique joint en annexe, le plan est muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) dans lequel on a tracé les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1 ; 4]$. On a tracé également la droite (d) d'équation $x = 4$.

- 1) a. Démontrer que $\int_1^4 h(x) dx = 0$.
b. Illustrer sur le graphique le résultat de la question précédente.
- 2) On note D le domaine du plan délimité par la droite (d) et les courbes représentatives des fonction h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1 ; 4]$.
En utilisant un intégration par parties, calculer l'aire de D en unités d'aire.



Exercice 2 (pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité) (5 points) :

(O, \vec{u}, \vec{v}) est un repère orthonormal direct du plan complexe.

Soit A le point d'affixe $1 + i$.

Au point M d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{1}{2}(z + i\bar{z})$.

- 1) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x' et y' réels.
 - a. Démontrer les égalités suivantes : $x' = \frac{1}{2}(x + y)$ et $y' = \frac{1}{2}(x + y)$. En déduire que le point M' appartient à la droite (OA).
 - b. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $M = M'$.
 - c. Démontrer que pour tout point M du plan les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et \overrightarrow{OA} sont orthogonaux.
- 2) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. M_1 est le point d'affixe z_1 image de M par r , M_2 le point d'affixe $z_2 = \bar{z}$, M_3 le point d'affixe z_3 tel que le quadrilatère $OM_1M_3M_2$ soit un parallélogramme.
 - a. Dans cette question uniquement M a pour affixe $4 + i$, placer les points M, M_1 , M_2 , M_3 .
 - b. Exprimer z_1 en fonction de z , puis z_3 en fonction de z .
 - c. $OM_1M_3M_2$ est-il un losange ? Justifier.
 - d. Vérifier que $z' - z = \frac{1}{2}i z_3$. En déduire que $MM' = \frac{1}{2}OM_3$.
- 3) Démontrer que les points M, M_1 , M_2 et M_3 appartiennent à un même cercle de centre O si et seulement si $MM' = \frac{1}{2}OM$.

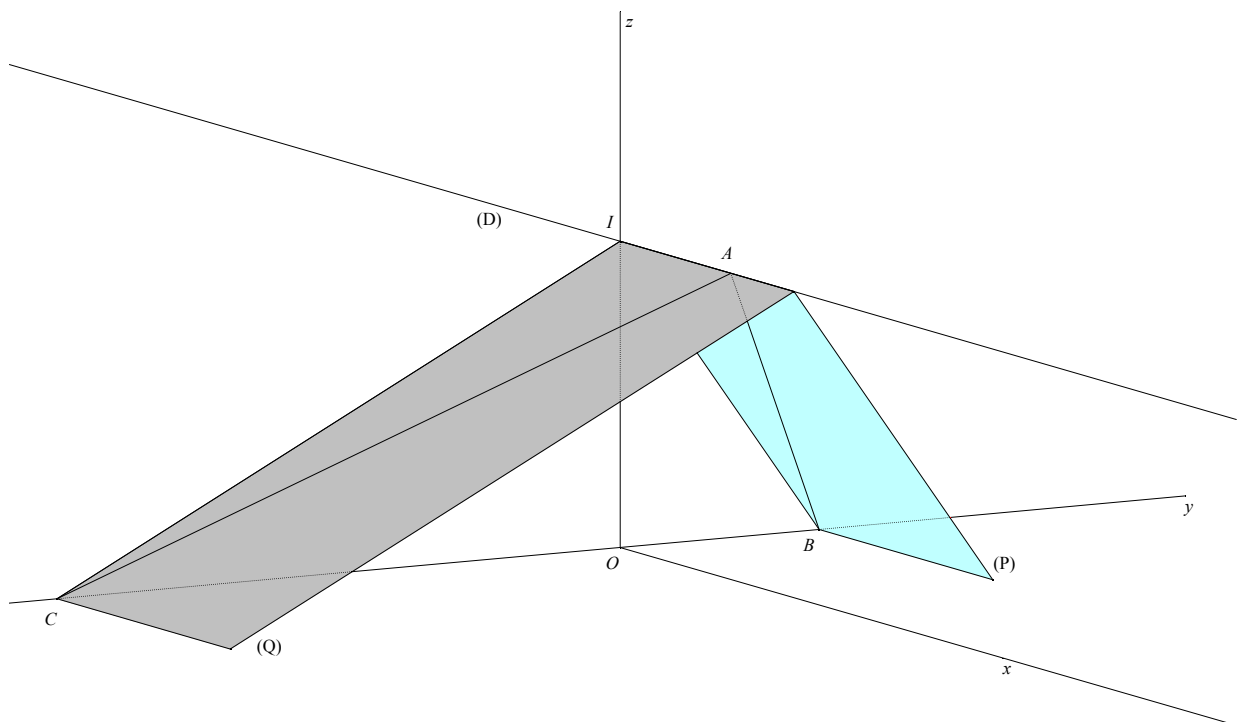
Donner alors la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{M'OM}$.

Exercice 3 (commun à tous les candidats) (5 points) :

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(3 ; 0 ; 6)$ et $I(0 ; 0 ; 6)$; on appelle (D) la droite passant par A et I.

On appelle (P) le plan d'équation $2y + z - 6 = 0$ et (Q) le plan d'équation $y - 2z + 12 = 0$.

- 1) Démontrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires.
- 2) Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (D).
- 3) Démontrer que (P) et (Q) coupent l'axe (O, \vec{j}) et déterminer les coordonnées des points B et C, intersections respectives de (P) et (Q) avec l'axe (O, \vec{j}) .
- 4) Démontrer qu'une équation du plan (T) passant par B et de vecteur normal \overline{AC} est $x + 4y + 2z - 12 = 0$.
- 5) Donner une représentation paramétrique de la droite (OA).
Démontrer que la droite (OA) et le plan (T) sont sécants en un point H dont on déterminera les coordonnées.
- 6) Que représente le point H pour le triangle ABC ? Justifier.



Exercice 4 (commun à tous les candidats) (4 points) :

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro et la lettre de la question ainsi que la valeur correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte aux questions 1 et 2 rapporte 0,5 point et à la question 3 rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

On s'intéresse à deux types de pièces électroniques, P_1 et P_2 , qui entrent dans la fabrication d'une boîte de vitesses automatique.

Une seule pièce de type P_1 et une seule pièce de type P_2 sont nécessaires par boîte.

L'usine se fournit auprès de deux sous-traitants et deux seulement : S_1 et S_2 .

Le sous-traitant S_1 produit 80 % des pièces de type P_1 et 40 % de pièces de type P_2 .

Le sous-traitant S_2 produit 20 % des pièces de type P_1 et 60 % de pièces de type P_2 .

- 1) Un employé de l'usine réunit toutes les pièces P_1 et P_2 destinées à être incorporées dans un certain nombre de boîtes de vitesses. Il y a donc autant de pièces de chaque type.

Il tire une pièce au hasard.

- a. La probabilité que ce soit une pièce P_1 est :

0,8	0,5	0,2	0,4	0,6
-----	-----	-----	-----	-----

- b. La probabilité que ce soit une pièce P_1 et qu'elle vienne de S_1 est :

0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
-----	-----	-----	-----	-----

- c. La probabilité qu'elle vienne de S_1 est :

0,2	0,4	0,5	0,6	0,8
-----	-----	-----	-----	-----

- 2) Il y a 200 pièces au total. Cette fois l'employé tire deux pièces simultanément. On suppose tous les tirages équiprobables.

- a. Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité que ce soit deux pièces P_1 est :

0,1588	0,2487	0,1683	0,0095
--------	--------	--------	--------

- b. Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité que ce soit deux pièces P_1 et P_2 est :

0,5000	0,2513	0,5025
--------	--------	--------

- c. La probabilité que ce soient deux pièces fabriquées par le même fournisseur est :

$\frac{357}{995}$	$\frac{103}{199}$	$\frac{158}{995}$
-------------------	-------------------	-------------------

- 3) La durée de vie exprimée en années des pièces P_1 et P_2 suit une loi exponentielle dont le paramètre λ est donné dans le tableau suivant :

λ	P_1	P_2
S_1	0,2	0,25
S_2	0,1	0,125

On rappelle que si X , durée de vie d'une pièce exprimée en années, suit une loi exponentielle de paramètre λ , alors $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'une pièce P_1 fabriquée par S_1 dure moins de 5 ans est :

0,3679	0,6321
--------	--------