

Baccalauréat S – Amérique du Sud – novembre 2007

EXERCICE 1 (Commun à tous les candidats) (4 points) :

- 1) Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.
On suppose connu le résultat suivant :

La fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur \mathbb{R} telle que

$$\varphi' = \varphi \text{ et } \varphi(0) = 1.$$

Soit a un réel donné.

- a. Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.
 - b. Soit g une solution de l'équation $y' = ay$.
Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = g(x) e^{-ax}$.
Montrer que h est une fonction constante.
 - c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.
- 2) On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$.
- a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur \mathbb{R} par :
 $f_0(x) = a \cos x + b \sin x$ soit une solution de (E).
 - b. Résoudre l'équation différentielle (E₀) : $y' = 2y$.
 - c. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E₀).
 - d. En déduire les solutions de (E).
 - e. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

EXERCICE 2 (Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité) (5 points) :

Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

- 1) On considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe i . On appelle S la réflexion (symétrie axiale) d'axe (AB).

Montrer que l'image M' par S d'un point M d'affixe z a pour affixe $z' = -i\bar{z} + 1 + i$.

- 2) On note H l'homothétie de centre A et de rapport -2 . Donner l'écriture complexe de H .
- 3) On note f la composée $H \circ S$.

- a. Montrer que f est une similitude.
b. Déterminer l'écriture complexe de f .

- 4) On appelle M'' l'image d'un point M par f .

- a. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM''} = -2 \overrightarrow{AM}$ est la droite (AB).
b. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM''} = 2 \overrightarrow{AM}$ est la perpendiculaire en A à la droite (AB).

EXERCICE 2 (Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité) (5 points) :

Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.

Soit f l'application qui à tout point M de \mathcal{P} d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

- 1) Soit E le point d'affixe $z_E = -i$. Déterminer l'affixe du point E', image de E par f .
2) Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.
3) On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1 .

Soit M un point distinct des points O, A et B.

- a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et -1 , on a :

$$\frac{z' + 1}{z' - 1} = \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right)^2.$$

- b. En déduire une expression de $\frac{M'B}{M'A}$ en fonction de $\frac{MB}{MA}$ puis une expression de l'angle $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B})$ en fonction de l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

- 4) Soit Δ la médiatrice du segment [AB]. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M' est un point de Δ .

- 5) Soit Γ le cercle de diamètre [AB].

- a. Montrer que si le point M appartient à Γ alors le point M' appartient à la droite (AB).
b. Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par f ?

EXERCICE 3 (Commun à tous les candidats) (5 points) :

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1) On considère le point A de coordonnées $(-2 ; 8 ; 4)$ et le vecteur \vec{u} de coordonnées $(1 ; 5 ; -1)$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur \vec{u} .
- 2) On considère les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives
$$x - y - z = 7 \quad \text{et} \quad x - 2z = 11.$$
Démontrer que les plans (P) et (Q) sont sécants.
On donnera une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée (d') .
Montrer que le vecteur de coordonnées $(2 ; 1 ; 1)$ est un vecteur directeur de (d') .
- 3) Démontrer que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.
- 4) On considère le point H de coordonnées $(-3 ; 3 ; 5)$ et le point H' de coordonnées $(3 ; 0 ; -4)$.
 - a. Vérifier que H appartient à (d) et que H' appartient à (d') .
 - b. Démontrer que la droite (HH') est perpendiculaire aux droites (d) et (d') .
 - c. Calculer la distance entre les droites (d) et (d') , c'est-à-dire la distance HH' .
- 5) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MH'} \cdot \overrightarrow{HH'} = 126$.

EXERCICE 4 (Commun à tous les candidats) (6 points) :

- 1) On considère la fonction f_1 définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_1(x) = 2x - 2 + \ln(x^2 + 1)$.
 - a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
 - b. Déterminer la dérivée de f_1 .
 - c. Dresser le tableau de variations de f_1 .
- 2) Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n , définie sur $[0 ; +\infty[$ par
$$f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2 + 1)}{n}.$$
 - a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
 - b. Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
 - c. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[0 ; +\infty[$.
 - d. Justifier que, pour tout entier naturel n , $0 < \alpha_n < 1$.
- 3) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$.
- 4) Étude de la suite (α_n)
 - a. Montrer que la suite (α_n) est croissante.
 - b. En déduire qu'elle est convergente.
 - c. Utiliser l'expression $\alpha_n = 1 - \frac{\ln(\alpha_n^2 + 1)}{2n}$ pour déterminer la limite de cette suite.