

Bac S – Amérique du nord – 31 mai 2007 – 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique : 1 cm).

On fera une figure que l'on complètera tout au long de cet exercice.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 3 + 5i$, $b = -4 + 2i$ et $c = 1 + 4i$.

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (2 - 2i)z + 1$.

- 1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .
- 2) a. Déterminer l'affixe du point B' image de B par f .
b. Montrer que les points (CB') et (CA) sont orthogonaux.
- 3) Soit M le point d'affixe $z = x + iy$, où on suppose que x et y sont des entiers relatifs.
Soit M' l'image de M par f .
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et \overrightarrow{CA} sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.
- 4) On considère l'équation (E) : $x + 3y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.
 - a. Vérifier que le couple $(-4 ; 2)$ est une solution de (E).
 - b. Résoudre l'équation (E).
 - c. En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5 ; 5]$ et tels que $\overrightarrow{CM'}$ et \overrightarrow{CA} soient orthogonaux.
Placer ces points sur la figure.