

Bac S – Amérique du nord – 31 mai 2007

Exercice 1 (commun à tous les candidats) (3 points) :

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- 1) L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit (P) le plan dont une équation est : $2x + y - 3z + 1 = 0$.
Soit A le point de coordonnées $(1 ; 11 ; 7)$.

Proposition 1 : « Le point H, projeté orthogonal de A sur (P), a pour coordonnées $(0 ; 2 ; 1)$ ».

- 2) On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2 - 2y$.
On appelle u la solution de (E) sur \mathbb{R} vérifiant $u(0) = 0$.

Proposition 2 : « On a $u\left(\frac{\ln(2)}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ».

- 3) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$.

Proposition 3 : « Pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq 7$ ».

Exercice 2 (Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité) (5 points) :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique : 4 cm).

Soit A le point d'affixe $z_A = i$ et B le point d'affixe $z_B = e^{-i 5\pi/6}$.

- 1) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par r.
- Déterminer une écriture complexe de r.
 - Montrer que l'affixe de C est $z_C = e^{-i \pi/6}$.
 - Ecrire z_B et z_C sous forme algébrique.
 - Placer les points A, B et C.
- 2) Soit D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2 ; -1 et 2.
- Montrer que l'affixe de D est $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Placer le point D.
 - Montrer que A, B, C et D sont sur une même cercle.
- 3) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h.
- Déterminer une écriture complexe de h.
 - Montrer que l'affixe de E est $z_E = \sqrt{3}$. Placer le point E.
- 4) a. Calculer le rapport $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$. On écrira le résultat sous forme exponentielle.
b. En déduire la nature du triangle CDE.

Exercice 3 (commun à tous les candidats) (5 points) :

Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties.

La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,2.

Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05 ;
- s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

- 1) On appelle : E_1 l'événement « le joueur perd la première partie » ;
 E_2 l'événement « le joueur perd la deuxième partie » ;
 E_3 l'événement « le joueur perd la troisième partie » ;
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.
On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
- Quelles sont les valeurs prises par X ?
 - Montrer que la probabilité de l'événement $(X = 2)$ est égale à 0,031 et que celle de l'événement $(X = 3)$ est égale à 0,002.
 - Déterminer la loi de probabilité de X .
 - Calculer l'espérance de X .
- 2) Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'événement : « le joueur perd la n -ième partie », \bar{E}_n l'événement contraire et on note p_n la probabilité de l'événement E_n .
- Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, les probabilités des événements $E_n \cap E_{n+1}$ et $\bar{E}_n \cap E_{n+1}$ en fonction de p_n .
 - En déduire que $p_{n+1} = 0,05p_n + 0,05$ pour tout entier naturel n non nul.
- 3) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - \frac{1}{19}$.
- Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - En déduire, pour tout entier naturel n non nul, u_n puis p_n en fonction de n .
 - Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 (commun à tous les candidats) (7 points) :

- 1) Restitution organisée de connaissances.

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

On supposera connus les résultats suivants :

- la fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et est égale à sa fonction dérivée ;
- $e^0 = 1$;
- pour tout réel x , on a $e^x > x$;
- Soient deux fonction φ et ψ définies sur l'intervalle $[A ; +\infty[$ où A est un réel positif.

Si pour tout x de $[A ; +\infty[$, $\psi(x) \leq \varphi(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

- a. On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

Montrer que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $g(x) \geq 0$.

- b. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

- 2) On appelle f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4} x e^{-x/2}$.

On appelle C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

La courbe C est représentée en annexe.

- Montrer que f est positive sur $[0 ; +\infty[$.
- Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire une conséquence graphique pour C .
- Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations sur $[0 ; +\infty[$.

3) On considère la fonction F définie sur $[0 ; +\infty[$ par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

a. Montrer que F est une fonction strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

b. Montrer que $F(x) = 1 - e^{-x/2} - \frac{x}{2} e^{-x/2}$.

c. Calculer la limite de F en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de F sur $[0 ; +\infty[$.

d. Justifier l'existence d'un unique réel positif α tel que $F(\alpha) = 0,5$.

A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

4) Soit n un entier naturel non nul. On note A_n l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan située entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = 0$ et $x = n$.

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $A_n \geq 0,5$.

Annexe

